Indovinelli non presenti altrove

Mentre la maggioranza dei giochi di Filicaia trova riscontro nel *De viribus quantitatis* di Pacioli (parti I, II, III) o nei *Ludi* di Leon Battista Alberti (parte IV) ci sono alcuni che non sono registrati in quelle opere.

Si può trattare di giochi o assenti dal manoscritto di Pacioli per ragioni filologiche (in Pacioli mancano diversi giochi segnalati nell'indice) o di varianti diverse tali da configurarli come giochi autonomi. Nel primo caso è possibile che Filicaia avesse accesso al testo di Pacioli che conteneva tali giochi. Bisogna, tuttavia, sottolineare che, da una parte, i giochi "originali" sono relativamente pochi rispetto al numero totale e, dall'altra, che in quelli ripresi dai predecessori (in particolare nella parte aritmetica) l'impostazione spesso è molto differente.

Ecco i giochi non presenti nelle fonti:

Seconda parte: XV, XX, XXVI

Terza parte: I e XXVII

Quarta parte: VI

Inoltre, alcuni giochi che sappiamo simili e, probabilmente presenti nell'originale di *De viribus,* sono assenti nell'unica copia del testo di Pacioli che è sopravvissuta. L'indice di *De viribus* ci permette di stabilire le corrispondenze. Nella tabella di corrispondenze preparata da Ulivi (Ulivi 2013: 256-257) tali giochi sono indicati con cifre arabe. Così troviamo nell'indice di Pacioli, ma non nel testo i giochi corrispondenti a questi problemi del nostro trattato: XIII (parzialmente), XIV, XXI, XXII, XXIX della seconda parte e IX, X, XII, XVI, XVII, XIX, XX della terza parte.

Problemi presenti nell'indice di Pacioli, ma assenti nel testo del manoscritto sopravvissuto:

Filicaia	**Pacioli**	**Tematica del gioco**
Seconda parte		
XIII	LXXXI, c. 115-118	il gioco della morra, regola per vincere sempre
XIV	c. 119	il gioco del tocco con il trucco che permette di vincere sempre
XXI	c. 109	scoprire la carta tolta dal mazzo guardando il mazzo velocemente due volte. La prima volta si fa il calcolo (addizione) di tutti i numeri e

		le figure. La differenza tra il risultato e la somma del mazzo (312) svela il valore della carta. La seconda volta si fa il controllo dei semi facendo attenzione solo alla figura o numero mancante. Cf. Bressanini, Toniato (109-110)
XXII	c. 110	scoprire la carta tolta dal mazzo guardando il mazzo velocemente una volta sola. Consiste nel calcolo combinato tra numeri/figure e semi delle carte del mazzo
XXIX	c. 46	trovare dove è nascosto un anello tra i membri di una brigata
Terza parte		
IX	c. 72 e 73	mercante che manda i suoi 4 garzoni al mercato per vendere rispettivamente 10, 30, 50, 70 pezze di saia. Devono venderle ottenendo ciascuno lo stesso ricavo. Assomiglia al problema VIII, terza parte, dove i garzoni sono 3.
X	c. 77	regola per indovinare in quanti pezzi è divisa una mela
XII	c. 82	come disporre nel ballo otto donne e sette uomini
XVI	c. 113	calcolo come 10 persone si possono disporre a tavola senza mai ripetere lo stesso assetto. Raccontato in maniera molto vivace attraverso una storia di 10 mercanti fiorentini che mangiano in una osteria a Roma
XVII	c. 89	il caso delle monache nel monastero che devono essere guardate a vista. Dei modi di disporle per poterle controllare e dei modi in cui si possono disporre per non essere controllate
XIX	c. 111	chicchi di grano raddoppiati ogni giorno per un mese. Esempio della progressione geometrica. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 ... ecc. Come calcolare in maniera semplificata la somma di tale progressione

XX	c. 112	chicchi di grano raddoppiati (previa somma dei precedenti). Esempio: 1, 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458 ...ecc. Come calcolare in maniera semplificata la somma di tale progressione. Come calcolare in maniera semplificata la somma di tale progressione

Problemi assenti sia nel corpo del trattato *De viribus quantitatis* sia nell'indice

Tali problemi, non rintracciabili in nessun modo nelle fonti dirette del trattato di Piero da Filicaia sono solo 6.

Seconda parte:

Demostratio XV a giuchare a pari o caffo et non perdere servando certa conditione

Gioco chiamato "pari o caffo", ma distinto dalla versione più popolare cioè quella giocata mostrando e sommando le dita. Si tratta di un gioco che consiste nell'indovinare se il numero di oggetti presi dai giocatori è pari o dispari. Si tratta di oggetti che il secondo giocatore non vede. Come tale il gioco sarebbe soggetto alla casualità; una volta si indovina, altre volte no. Il modo per vincere il gioco (che di fatto annulla la casualità) è il gioco con il "testimonio" cioè con il resto anticipatamente designato. Tale "testimonio" è costruito in modo che la scelta "caffo" (dispari) degli oggetti da chi li sceglie sia sempre quella giusta. Se quello con cui giochiamo non conosce il trucco, dopo al massimo un paio di giocate sbaglia e cominciamo a scegliere gli oggetti noi. In tal caso basta scegliere sempre il numero dispari di oggetti per vincere. Ovvio che il gioco di questo tipo può essere presentato al compagno di gioco solo una volta perché si accorge poi del trucco. In ogni caso, per vincere, è fondamentale convincere il compagno di gioco a modificare le regole per giocare con il resto (testimonio). Per fare ciò Filicaia suggerisce di appellarsi all'onestà e alla stabilità delle regole.

Meccanismo del resto (testimonio): giocatore A prende p.es. 3 oggetti (dispari). Il giocatore B dice che il numero delle monete è "caffo". Come "testimonio" si mette da parte 1 oggetto tra quelli presi e così il numero degli oggetti risulta pari perché 3-1=2. Se il giocatore B dice "pari", come "testimonio" si tolgono due oggetti, allora 3-2=1 (dispari), allora il giocatore B perde. Fin quando il giocatore A prenderà sempre il numero dispari di oggetti, vincerà ogni volta con questo meccanismo di "testimonio".

Demostratio XX per la sopradecta regola a fare uno giuoco con le carti

Alla base di questo gioco stanno altri giochi descritti precedentemente in Filicaia e presenti anche in Pacioli (basati sulla disposizione in cerchio degli oggetti/numeri/carte). La versione in questa *demostratio* si basa sulle carte e ne costituisce una versione spettacolare che permette di raccogliere le carte tutte insieme in base al loro valore mentre esse rimangono coperte.

Filicaia propone la versione con 12 carte (48 in totale, ma 12 disposte in cerchio) e, oltre alla regola, si basa anche sull'abilità di nascondere la regola (p.es. mescolando le carte di diversi colori per confondere).

Filicaia descrive la versione con 48 carte. Il proponente fa il cerchio con le carte disponendole in ordine crescente da 1 a 12 (dall'asso al re). Distribuisce le rimanenti carte (36) ai compagni senza guardarle. Chiede al primo su che numero, cioè "posizione" (y) vuole posare la carta (numero deve essere superiore a 14). Il giocatore comunica al proponente la posizione (y), supponiamo che sia "18". Supponiamo anche che la carta scelta sia 3 (x=3).

Ora il proponente, partendo da 1 (asso) in senso orario conta dal primo numero che supera la sua carta (da x+1) e arriva alla posizione y. Se la posizione è 18, come indicato prima, allora arriva a 5 e posa la carta. Ora chiede al giocatore di contare in senso antiorario a partire dalla posizione della carta (non più 1, ma 5), iniziando con il conteggio da x+1 e facendo il conteggio fino a 18. Con questo sistema arriviamo a posizionare la carta sopra la carta 3 cioè il nostro x. Il vero senso del gioco si basa sul fatto che x è preso in considerazione nella mossa che porta al posizionamento finale della carta e che prima il proponente sistema opportunamente la carta sulla base di y che gli viene comunicata. Possiamo esprimerlo in maniera seguente:

$x=-(y-x)+(y-(n+2))+(n+2)$

per ogni y superiore a n+2

Il numero 14 che viene proposto in questo gioco è, come nei casi precedenti il numero degli elementi in cerchio più due (n+2). Se tralasciamo n+2 la relazione è ancora più semplice

$x=-(y-x)+y$

Quindi per x=4 e y=20 (dove x è un incognita) e y è comunicato al proponente che posiziona opportunatamente la carta sulla base di y, avremo $x=-(20-4)+20$

Filicaia suggerisce l'iterazione del gioco (ognuno dei compagni ha diverse carte) in modo da posizionare tutte le carte dei compagni sopra i rispettivi valori (sopra 2 ci saranno 2, sopra 3 tutti i 3, eccetera sopra il re tutti i re).

Demostratio XXVI a fare omni puncto con 2 o 3 o 4 dadi a chiusi occhi

Il gioco dei dadi. Consiste nel lanciare i dadi a occhi chiusi in modo da ottenere un risultato prestabilito. Un lancio è eseguito ad occhi aperti. Nei lanci successivi si sfrutta il fatto che la somma dei numeri su ogni coppia di facce opposte del dado è sempre 7. Così si arriva al numero prestabilito cioè quello indicato dai compagni. Il gioco chiaramente si basa sulla destrezza del giocatore, serve la capacità di girare le facce piuttosto che fare un lancio regolare.

Terza parte

Caso I di uno corvo che voleva bere in canpagna

Si tratta di una ripresa della favola di Esopo della cornacchia e la brocca raccontata con molti particolari che rendano la narrazione molto vivace: la descrizione della mietitura nella campagna vicina a Roma, i dettagli delle brocche che utilizzavano, la convincente successione di tentativi che il corvo fa per arrivare all'acqua nella brocca. Alla fine l'Autore cerca di collegare il racconto alla matematica giustificando la sua inclusione nella raccolta. Secondo le sue parole, comportamento del corvo (o meglio, la procedura seguita dal corvo per alzare il livello dell'acqua nella brocca) sarebbe *mathematico* cioè razionale o intelligente.

Caso 27 di uno altro modo di racorre

Esempio 1. Cominciamo dal numero *4*, i numeri successivi si ottengono aggiungendo al numero dato la metà (quindi moltiplichiamo il numero per *3/2*):

$4+\frac{1}{2} \cdot 4 = 4 \cdot 3/2 = 6$

$6+\frac{1}{2} \cdot 6 = 6 \cdot 3/2 = 9$

$9+\frac{1}{2} \cdot 9 = 9 \cdot 3/2 = 13\frac{1}{2}$ ecc.

Il metodo proposto da Filicaia: per calcolare la somma dei numeri: $4 + 6 + 9 + 13\frac{1}{2}$ bisogna moltiplicare il primo numero per *2* e sottrarre il risultato dall'ultimo numero moltiplicato per *3*:

$4 + 6 + 9 + 13\frac{1}{2} = 3 \cdot 13\frac{1}{2} - 2 \cdot 4 = 40\frac{1}{2} - 8 = 32\frac{1}{2}$

È un metodo corretto per sommare il numero finito dei termini consecutivi della successione geometrica di ragione *3/2* .

Successione geometrica: indichiamo con a_1 il primo termine della successione. Il termine successivo della progressione viene ottenuto moltiplicando il termine precedente con una costante stabilita q (la cosiddetta ragione della successione). Quindi i termini della successione sono i seguenti:

secondo: $a_2 = a_1 \cdot q$

terzo: $a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2$

quarto: $a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3$

n-esimo: $a_n = a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}$

Formula per calcolare la somma per i primi *n* termini della successione geometrica

Indichiamo la somma con S_n :

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

allora (per q diverso da 1)

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

p.es. https://it.wikipedia.org/wiki/Serie_geometrica oppure la voce "progressione geometrica" sempre su Wikipedia.

La formula può essere trasformata in un'altra (probabilmente meno comune):

$$S_n = \frac{q}{q-1} a_n - \frac{1}{q-1} a_1$$

La somma S_n può essere allora calcolata nel modo seguente: si deve moltiplicare il primo termine della successione che viene sommata per $\frac{1}{q-1}$ e sottrarre il risultato dall'ultimo termine, moltiplicato per $\frac{q}{q-1}$

Nel primo esempio $q = \frac{3}{2}$, allora moltiplichiamo il primo termine per $\frac{1}{\frac{3}{2}-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ e l'ultimo termine per $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$.

Esempio 2. Iniziamo con $a_1 = 9$, aumentiamo i numeri di 1/3, allora li moltiplichiamo per $q = 4/3$. nel nostro esempio abbiamo: $a_2 = 12$, $a_3 = 16$. La somma di una tale successione verrà calcolata moltiplicando il primo termine per 3, perché $\frac{1}{\frac{4}{3}-1} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ e sottraendo il risultato dall'ultimo termine moltiplicato per 4: $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}-1} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = 4.$

La somma $S_3 = 16 \cdot 4 - 9 \cdot 3 = 64 - 27 = 37.$

Attenzione. Se aumentiamo i numeri successivi di $\frac{1}{k}$-esimo ($k=2,3,4,5$ ecc.), otteniamo la ragione $q = \frac{k+1}{k}$.

In tal caso: $\frac{\frac{k+1}{k}}{\frac{k+1}{k}-1} = \frac{\frac{k+1}{k}}{\frac{1}{k}} = k + 1$

nonché $\frac{1}{\frac{k+1}{k}-1} = \frac{1}{\frac{1}{k}} = k.$

Pertanto, la somma della successione verrà calcolata sottraendo il primo termine della successione, moltiplicato per k dall'ultimo termine, moltiplicato per $k+1$, così come nel testo originale: "*sempre tu harai a multiplichare el primo termine per il numero della sua ascensione in questo caso et caveralo della multiplicatione del'ultimo termine in uno più che 'l primo*"

Allora il nostro k costituisce "*il numero della ascensione*". Nel testo è presente un altro esempio, ma senza che venga indicata una successione geometrica specifica:

Esempio 3. Se aumentiamo i numeri di ¼ del loro valore ($k = 4$, ragione $q = 5/4$), otteniamo la somma della successione geometrica, moltiplicando il primo termine della successione per $k = 4$ e sottraendo il risultato dall'ultimo termine, moltiplicato per $k+1 = 5$.